131 développements pour l'oral - Lesesure

Calcul des intégrales de Fresnel

201 235 241
228 236 245
230 239

Théorème : Les intégrales de Fresnel : $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Preuve : (V1) Par les séries de Fourier — oral

> L'idée pour ce développement est d'étudier la convergence à travers une autre intégrale et de trouver la valeur des intégrales à l'aide de séries de Fourier.

① Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du$. Montrons que I converge.

$$=\underbrace{\int_0^1\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du}_{=I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du}_{=I_2}$$

- $\forall u\in]0;1[$, $\left|\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{u}}$ et $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{u}}$ est continue et est intégrable sur $]0;1[$ donc I_1 converge.
- Soit $A\geq 1$. Les fonctions $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{u}}$ et $u\mapsto\frac{e^{iu}}{i}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;A]$. Par le théorème d'intégration par parties,

$$\int_1^A\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du=\underbrace{\frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0}-\frac{e^i}{i}+\frac{1}{2i}\int_1^A\underbrace{\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}}_{|\cdot|\leq\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}}du$$

Or : $u\mapsto\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Ainsi, I_2 converge et I aussi.

② Soit $J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2i\pi s^2}ds$. Montrons que J converge.

Soit $u=2\pi s^2$ définissant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.

$$J=2\int_0^{+\infty}e^{2i\pi s^2}ds=2\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{u}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times I$$

Ainsi, J converge.

Trouvons la valeur de J.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la fonction vérifiant $\forall x\in[0;1[$, $f(x)=e^{2i\pi x^2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

$$c_n(f)=\int_0^1 e^{2i\pi x^2}e^{-2i\pi nx}dx$$
$$=\int_0^1 e^{2i\pi[x^2-nx]}dx$$
$$=\int_0^1 e^{2i\pi\left[(x-\frac{n}{2})^2-\frac{n^2}{4}\right]}dx$$
$$=e^{-i\frac{\pi n^2}{2}}\int_0^1 e^{2i\pi(x-\frac{n}{2})^2}dx \qquad s=x-\frac{n}{2},\ ds=dx$$
$$=e^{-i\frac{\pi n^2}{2}}\int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1}e^{2i\pi s^2}ds$$

Ainsi, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $c_{2k}(f)=\int_{-k}^{-k+1}e^{2i\pi s^2}ds$

Comme J converge, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_{2k}(f)$ aussi.

$$J=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_{2k}(f)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-k}^{-k+1}e^{2i\pi s^2}ds$$

Par ailleurs, $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^1_{m}([0;1])$. Ainsi, sa série de Fourier converge normalement vers f.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{2i\pi nx}$$

En particulier, $f(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)$ et $f(\frac{1}{2})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)\times(-1)^n$

$$J=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)\left[1+(-1)^n\right]=\frac{f(0)+f(\frac{1}{2})}{2}=\frac{1+i}{2}$$

③ En prenant les parties réelles et imaginaires de J :

$$\int_0^{+\infty}\sin(2\pi s^2)ds=\frac{1}{4}=\int_0^{+\infty}\cos(2\pi s^2)ds$$

Par le changement de variable $t=\sqrt{2\pi}s$ $\quad dt=\sqrt{2\pi}ds$

$$\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$$

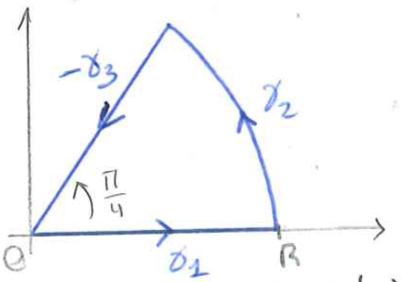
Preuve : (V2) Par les fonctions holomorphes

Soit $f:\begin{array}{l}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto e^{-z^2}\end{array}$, $R\in\mathbb{R}_+^*$ et

$\gamma_1:\begin{array}{l}[0;R]\to\mathbb{C}\\ t\mapsto t\end{array}$

$\gamma_2:\begin{array}{l}[0;\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{C}\\ t\mapsto Re^{it}\end{array}$

$\gamma_3:\begin{array}{l}[0;R]\to\mathbb{C}\\ t\mapsto te^{i\frac{\pi}{4}}\end{array}$



Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, par le théorème intégral de Cauchy,

$$0=\int_0^R e^{-t^2}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}iRe^{it}e^{-R^2e^{2it}}dt-\int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-(e^{i\frac{\pi}{4}}t)^2}dt$$

i.e. $$\int_0^R e^{-it^2}dt=e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^R e^{-t^2}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}iRe^{it}e^{-R^2e^{2it}}dt\right]$$

Or : $\forall t\in[0;\frac{\pi}{4}]$, $|iRe^{it}e^{-R^2e^{2it}}|\leq Re^{-R^2\cos(2t)}$

et par concavité de $\cos$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$,

$$\cos\left[\left(1-\tfrac{2}{\pi}\times 2t\right)\times 0+\left(\tfrac{2}{\pi}\times 2t\right)\times\tfrac{\pi}{2}\right]\geq\left(1-\tfrac{2}{\pi}\times 2t\right)\cos(0)+\left(\tfrac{2}{\pi}\times 2t\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

i.e. $\cos(2t)\geq 1-\frac{2}{\pi}\times 2t$

Ainsi,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}iRe^{it}e^{-R^2e^{2it}}dt\right|\leq\int_0^{\frac{\pi}{4}}Re^{-R^2(1-\frac{4}{\pi}t)}dt$$
$$\leq Re^{-R^2}\left[\frac{\pi}{4R^2}e^{\frac{4R^2}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$\leq\frac{\pi}{4R}e^{-R^2}\left[e^{R^2}-1\right]$$
$$\leq\frac{\pi}{4R}\left[1-e^{-R^2}\right]$$

Ainsi, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} i R e^{it} e^{-R^2 e^{2it}} dt \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Par ailleurs, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires,

- $\int_0^{+\infty} \cos(-t^2) dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- $\int_0^{+\infty} \sin(-t^2) dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Théorème: Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1_m([0;2\pi])$

Alors: La série de Fourier de f converge normalement vers f.

Preuve:

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a: $\left[|c_n(f')| - \frac{1}{|n|}\right]^2 \geq 0$

d'où: $2\frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2$

Par ailleurs, puisque $c_n(f') = in\,c_n(f)$,

$2|c_n(f)| \leq \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2$

Par le théorème de Parseval, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2$ est convergente et alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est convergente.

Théorème: (d'Abel) Soit $f : [a;b[\to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ et $g : [a;b[\to \mathbb{R}$ continue telle que:

(i) f est décroissante et $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$

(ii) $\exists M > 0 \setminus \forall x \in [a;b[, \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$

Alors: $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$. Par (i), $\exists A > 0 \setminus f(A) < \varepsilon$

Par la deuxième formule de la moyenne,

$\forall a \leq x < y < b, \exists c \in [x;y] \setminus \int_x^y f(t)g(t)dt = f(x)\int_x^c g(t)dt$

Ainsi, $\forall A \leq x < y$, $\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| \leq f(x) \times M$
$\leq f(A) \times M$
$\leq M \times \varepsilon$

Par le critère de Cauchy, on a alors que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

Temps:
V1 12' 34'' speechless
V2 12' 49'' speechless